ΑΣΚΗΣΗ 1^{η}

Επαναληπτική Άσκηση στο κεφ. 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

α) ΝΔΟ η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0,1]$

β) Να εφαρμόσετε δύο επαναλήψεις της Μεθόδου Διχοτόμησης για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής της ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$

γ) Να μετασχηματίσετε την εξίσωση $f(x)=0$ σε μια ισοδύναμη μορφή σταθερού σημείου και στη συνέχεια να εκτελέσετε για $x_0 = 0.2$, δύο επαναλήψεις της Μεθόδου σταθερού σημείου, για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_2 της ρίζας της $f(x)=0$

Λύση

α) $f(0) = 1 > 0$ και $f(1) = -3 < 0$

Η f συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,1]$

Άρα, λόγω ότι $sgn(f(0)) \neq sgn(f(1))$ από Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = 0$

Έπειτα, $f'(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

άρα η $f \downarrow$ στο $(0,1)$

Επομένως η $\exists$ μοναδική ρίζα

β) Μέθοδος Διχοτόμησης

1η επανάληψη $\rightarrow$ στο $[0,1]$

$f(0) = 1 > 0$ και $f(1) = -3 < 0$

$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5 \rightarrow f(0.5) = -1.75 < 0$

$f(0) \cdot f(x_0) < 0 \rightsquigarrow$ από Θ. Bolzano $\exists \xi_1 \in (0, 0.5)$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

2η επανάληψη → στο $[0, 0.5]$

$$x_1 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$$

όπου δεν χρειάζεται να βρούμε τώρα το $f(0.25)$ διότι δεν θα γίνει άλλη επανάληψη από εκφώνηση

γ) Μέθοδος σταθερού σημείου = Γενική επαναληπτική μέθοδος

Η διαδικασία γνωστή

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \qquad \left(\text{ή } f(x) = 0 \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow 6x = 2x^3 + 1 \Rightarrow \qquad \Rightarrow 2x^3 = 6x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} \quad (*) \qquad \left. \Rightarrow x = \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} \right)$$

Δηλ. πήρα την $x = g(x)$

άρα θέτοντας στο πρώτο μέλος $x = x_{k+1}$ και στο δεύτερο μέλος $g(x) = g(x_k)$ παίρνω την γεν. επαναλ. μέθοδο μορφής

$$x_{k+1} = g(x_k) = \frac{x_k^3}{3} + \frac{1}{6}$$

Εξετάζουμε αν πληρείται το Θ. περιορ. συστολής (ή σταθ. σημείου)

▸ Προφανώς εξετάζω στο $[0, 0.5]$ διότι η ρίζα $\xi \in [0, 0.5]$

άρα $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}$

• g συνεχής στο $[0, 0.5]$, • g παραγωγ. στο $(0, 0.5)$

και $g'(x) = x^2 > 0$, $\forall x \in (0, 0.5)$

η g άρα είναι $\nearrow$ τότε $g[0, 0.5] = [g(0), g(0.5)] =$
$= [0.17, 0.208] \subseteq [0, 0.5]$

▸ $L = \max_{0 \le x \le 0.5} |g'(x)| < 1$ ΟΔΟ | $\max|g'(x)| = \max(|g'(0)|, |g'(0.5)|)$

$g''(x) = 2x > 0 \Rightarrow g' \nearrow$ | $\Rightarrow = \max\{0, 0.25\} = 0.25 < 1$

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ!!!

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

ΑΣΚΗΣΗ 2^{η}

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON)

α) Δίνεται η γενική επαναληπτική μέθοδος

$x_{k+1} = g(x_k)$, $k=0,1,2,\dots$ με τύπο

$g(x) = \frac{(x+1)^3}{6} - 1$. ΝΔΟ συγκλίνει $\forall x_0 \in [-2,0]$

Έπειτα, να βρεθεί το όριο της ακολουθίας που παράγεται από την επαναληπτική μέθοδο καθώς επίσης και την ταχύτητα σύγκλισης

β) Να γραφεί η μέθοδος N-R για την επίλυση της εξίσωσης $x^3 - 5x = 0$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η μέθοδος συγκλίνει σε κάποια από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης όπου $x_0 = 1$.

ΛΥΣΗ (Θέμα Μηχανικών Η/Υ 31-8-2012)

α) $g(x) = \frac{(x+1)^3}{6} - 1$ με $g \in C[-2,0]$

Άλλα, $g(x_k) = x_{k+1}$, $k=0,1,\dots \iff \frac{(x_k+1)^3}{6} - 1 = x_{k+1}$, $k=0,1\dots$

Άρα, θέτουμε $f(x) = x - \frac{(x+1)^3}{6} + 1$ με $f \in C[-2,0]$

όπου $f(-2) = -\frac{5}{6} < 0$ και $f(0) = \frac{5}{6} > 0$

Άρα, από Θ. Bolzano $\exists x^* \in (-2,0)$ τω $f(x^*) = 0$

Είναι η ρίζα όμως μοναδική;;

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1+\sqrt{2} \\ x_2 = -1-\sqrt{2} \end{array} \right.$

Βλέπουμε ότι οι ρίζες είναι εκτός του διαστήματος $[-2,0]$ και εντός των ριζών x_1 και x_2 η $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $[-2,0]$. Άρα, x^* μοναδική λύση

Στη συνέχεια βλέπουμε εάν η g καλώς ορισμένη.

$g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$ συνεχής στο $[-2,0]$ και $g'(x) > 0$

άρα $g \nearrow$ στο $[-2,0]$, άρα $g([-2,0]) = [g(-2), g(0)] =$

$= [-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}] \subseteq [-2,0]$ (καλώς ορισμένη)

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

Ενώ, $L = \max_{x\in[-2,0]} |g'(x)| = \max_{x\in[-2,0]} \left|\frac{(x+1)^2}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

Άρα, η g συστολή $\Rightarrow$ g συγκλίνει στη x^*

Ποιά τώρα η x^*;;;

$$f(x^*)=0 \Rightarrow x^* - \frac{(x^*+1)^3}{6} - 1 = 0$$

Προφανής ρίζα η $x^*=-1$

και αφού x^* μοναδική άρα δεν εξετάζουμε για άλλες ρίζες. Επομένως $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = -1$.

Η ταχύτητα σύγκλισης τώρα είναι η τάξη σύγκλισης όπου επίσης αφού η $x^*=-1$ ρίζα της f έχει πολλαπλότητα ίση με 3 άρα και η τάξη είναι ίση με 3 (δηλ. κυβική σύγκλιση)

β) $x^3-5x=0 \Rightarrow x(x^2-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0\\ x_2=\sqrt{5} \\ x_3=-\sqrt{5}\end{cases}$

Έστω, $\varphi(x)=x^3-5x$

με x_1, x_2 και x_3 ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης $\varphi(x)$

(N-R)

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, για πολλαπλότητα ίση με 1

Άρα, $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3-5x_k}{3x_k^2-5}$

• $x_0=1$

$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3-5x_0}{3x_0^2-5} = 1 - \frac{1-5}{3-5} = 1-\frac{4}{2} = 1-2=-1$

• $x_1=-1$

$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3-5x_1}{3x_1^2-5} = (-1) - \frac{(-1)^3-5(-1)}{3(-1)^2-5} = -1 - \frac{5-1}{3-5} = 1$

• $x_2=1$

$x_3=-1$ ... κλπ Δεν συγκλίνει όπως φαίνεται.

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi